Материалы для проведения регионального этапа

XL ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2013–2014 учебный год

Второй день

4–5 февраля 2014 г.

Москва, 2014

Сборник содержит материалы для проведения III этапа XL Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Федеральной методической Комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н.Х. Агаханов, А.В. Антропов, С.Л. Берлов, И.И. Богданов, С.Г. Волчёнков, А.И. Гарбер, А.И. Голованов, А.Ю. Головко, О.Ю. Дмитриев, Л.А. Емельянов, Д.Д. Карпушкин, П.А. Кожевников, Д.Н. Крачун, А.Д. Матушкин, Е.Г. Молчанов, О.С. Нечаева, О.К. Подлипский, И.С. Рубанов, Р.С. Садыков, В.А. Сендеров, М.Б. Скопенков, К.А. Сухов, Д.А. Терёшин, А.И. Храбров, Д.Г. Храмцов, А.С. Циглер, В.З. Шарич.

В скобках после каждой задачи указана фамилия ее автора.

Компьютерный макет: И.И. Богданов.

Порядок проведения, методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2013–2014 учебного года.

Олимпиада проводится в два дня (тура) — 4 и 5 февраля 2014 года. Задания каждого тура содержат по 4 задачи для каждого класса. Каждый тур олимпиады длится 4 часа.

В связи со значительным различием во времени между восточными и западными регионами страны, с 2013-2014 учебного года предусмотрено изменение времени начала туров регионального этапа в соответствии с часовыми поясами; время начала туров указано в таблице ниже.

Разница с московским временем	Начало туров (по местному времени)
-1 час или 0 часов	10 часов
$+1$ час или $+2$ часа	11 часов
$+3$ часа или $+4$ часа	12 часов
$+5$ часов	13 часов
$+6$ часов	14 часов
$+7$ часов или $+8$ часов	15 часов

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 56 (28 — I тур, 28 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т.п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Ниже приведена стандартная методика оценивания решений.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение, но имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
5–6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3–4	В том случае, когда решение задачи делится на две равноценные части — решение одной из частей.
2–3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0–1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Важно отметить, что любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снимать баллы за то, что текст решения слишком длинный, или за то, что верное решение школьника отличается от приведённого в данной методической разработке или от других решений, известных жюри. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

Ниже приведены ответы и решения задач олимпиады. В комментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения, которые должны быть оценены дополнительно.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

Условия и решения задач

9 класс

9.5. Число x таково, что среди четырёх чисел $x-\sqrt{2}$, $x-1/x$, $x+1/x$, $x^2+2\sqrt{2}$ ровно одно не является целым. Найдите все такие x.

(*Н. Агаханов*)

Ответ. $\sqrt{2}-1$.

Решение. Обозначим $a=x-\sqrt{2}$, $b=x-1/x$, $c=x+1/x$, $d=x^2+2\sqrt{2}$. Заметим, что b и c не могут одновременно быть целыми. Действительно, тогда число $b+c=2x$ также целое, значит, x рационально, поэтому как a, так и d не будут целыми как суммы рационального и иррационального чисел. Итак, одно из чисел b и c нецелое, а тогда a и d должны оба быть целыми.

Значит, $x=a+\sqrt{2}$ при целом a. Тогда $d=a^2+2a\sqrt{2}+2+$ $+2\sqrt{2}=(a^2+2)+(2a+2)\sqrt{2}$, откуда следует, что $2a+2=0$, так как иначе d иррационально. Итак, $a=-1$, откуда $x=\sqrt{2}-1$. Осталось проверить, что найденное число подходит: для него целыми будут числа $a=-1$, $b=-2$ и $d=3$.

Комментарий. Только предъявлен ответ, но не доказана его единственность — 1 балл.

Доказано только, что a и d целые — 3 балла (эти баллы могут суммироваться с баллом за ответ).

Доказано, что может подойти лишь $x=\sqrt{2}-1$, но не проверено, что это значение подходит — 6 баллов.

9.6. Имеются 2013 карточек, на которых написана цифра 1, и 2013 карточек, на которых написана цифра 2. Вася складывает из этих карточек 4026-значное число. За один ход Петя может поменять местами некоторые две карточки и заплатить Васе 1 рубль. Процесс заканчивается, когда у Пети получается число, делящееся на 11. Какую наибольшую сумму может заработать Вася, если Петя стремится заплатить как можно меньше?

(*П. Кожевников*)

Ответ. 5 рублей.

Решение. Рассмотрим 4026-значное число A, состоящее из

2013 единиц и 2013 двоек. Пусть в этом числе в нечётных разрядах стоит k единиц и $\ell = 2013-k$ двоек, тогда в чётных разрядах будет k двоек и ℓ единиц (здесь k может принимать любое целое значение от 0 до 2013). Разность сумм цифр в нечётных разрядах и чётных разрядах равна $(k+2\ell)-(2k+\ell) = \ell-k = 2013-2k$. Поскольку 2013 делится на 11, число A делится на 11 тогда и только тогда, когда k делится на 11.

За один ход k изменяется не более чем на 1. Поэтому, если Вася изначально сложит число A, для которого, скажем $k = 5$ (очевидно, это возможно), то, очевидно, Пете потребуется не менее 5 раз изменить k на 1, чтобы впервые получить число, для которого k кратно 11 (т. е. $k = 0$ или $k = 11$).

Покажем, что наоборот, пяти ходов Пете всегда хватит. Меняя некоторую единицу, стоящую в нечётном разряде, с двойкой, стоящей в чётном разряде, он может уменьшить k на 1 за один ход, если только $k \neq 0$. Аналогично, меняя некоторую двойку, стоящую в нечётном разряде, с единицей, стоящей в чётном разряде, он может увеличить k на 1 за один ход, если только $k \neq 2013$. Пусть начальное Васино число давало остаток r при делении на 11. Если $r = 0$, то исходное число уже делится на 11, и ничего делать не нужно. Если $1 \leqslant r \leqslant 5$, то за r операций Петя может уменьшить k на r до ближайшего числа, кратного 11. Если же $6 \leqslant r \leqslant 10$, то за $11-r \leqslant 5$ операций Петя может увеличить k на $11 - r$ до ближайшего числа кратного 11 (это возможно, так как наибольшее возможное значение $k = 2013$ кратно 11).

Замечание. Если бы у мальчиков было по n карточек с цифрами 1 и 2, ответ в аналогичной задаче зависел бы от остатка от деления n на 11 — даже при больших n. Так, если $n = 2000$, то Пете нужно добиться того, чтобы k имело остаток 10 при делении на 11; значит, если $k = 2000$ или $k = 0$, то Пете может понадобиться 10 ходов.

Поэтому полное решение задачи должно существенно использовать тот факт, что $n = 2013$.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Приведён пример числа, с которым нельзя совершить требуемое меньше, чем за 5 ходов, **и доказано**, что это число именно такое — 3 балла.

Доказано только, что из любого числа можно получить делящееся на 11 не более, чем за 5 ходов — 3 балла.

Если в решении не используется тот факт, что $n = 2013$ — ставится не более 5 баллов.

Критерий делимости на 11 можно использовать без доказательства.

9.7. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Лучи AB и DC пересекаются в точке K. Оказалось, что точки B, D, а также середины отрезков AC и KC лежат на одной окружности. Какие значения может принимать угол ADC? *(Г. Жуков)*

Ответ. 90°.

Решение. Обозначим через N и M середины отрезков KC и AC соответственно. Тогда MN — средняя линия в треугольнике AKC, поэтому $\angle BAC = \angle NMC$. Кроме того, $\angle BAC = \angle BDC$, так как четырехугольник $ABCD$ — вписанный.

Пусть точки M и N лежат с одной стороны от прямой BD. Тогда M лежит внутри треугольника BCD; тогда она лежит внутри треугольника BND, а значит, и внутри его описанной окружности. Но тогда точки B, N, D и M не могут лежать на одной окружности. Значит, N и M лежат по разные стороны от BD, и $\angle BDC = \angle BMN$.

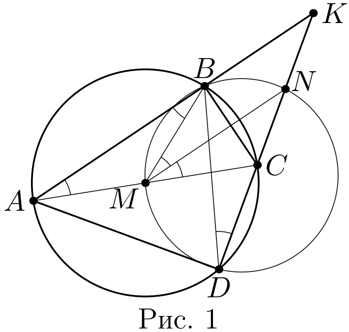

Рис. 1

Из параллельности MN и AK вытекает, что $\angle BMN = \angle ABM$, откуда $\angle BAC = \angle BDC = \angle ABM$. Отсюда получаем $AM = MB$, то есть в треугольнике ABC медиана BM равна половине стороны AC, откуда $\angle ABC = 90^\circ$, а значит, и $\angle ADC = 90^\circ$.

Комментарий. За отсутствие обоснования расположения точек M и N баллы не снимаются.

9.8. Какое из чисел больше: $(100!)!$ или $99!^{100!} \cdot 100!^{99!}$? (Напомним, что $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.) *(А. Храбров)*

Ответ. Второе число больше.

Решение. Пусть $a = 99!$. Тогда нам нужно сравнить числа $(100a)!$ и $a^{100a} \cdot (100a)^a$. Заметим, что

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot a < a^a,$$
$$(a+1)(a+2)(a+3) \cdot \ldots \cdot 2a < (2a)^a,$$
$$(2a+1)(2a+2)(2a+3) \cdot \ldots \cdot 3a < (3a)^a,$$
$$\vdots$$
$$(99a+1)(99a+2)(99a+3) \cdot \ldots \cdot 100a < (100a)^a.$$

Перемножим эти неравенства. Слева получим произведение всех чисел от 1 до $100a$, т. е. в точности $(100a)! = (100!)!$, а справа — число
$a^a(2a)^a(3a)^a \cdot \ldots \cdot (100a)^a = a^{100a} \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 100)^a = a^{100a}(100!)^a$, т. е. в точности $a^{100a}(100a)^a = 99!^{100!} \cdot 100!^{99!}$.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Доказательство неравенства $(n!)! < (n-1)!^{n!} \cdot n!^{(n-1)!}$ при маленьких значениях n, не обобщающееся на случай $n = 100$ — 0 баллов.

10 класс

10.5. На доске написано уравнение $x^3 + *x^2 + *x + * = 0$. Петя и Вася по очереди заменяют звёздочки на рациональные числа: вначале Петя заменяет любую из звёздочек, потом Вася — любую из двух оставшихся, а затем Петя — оставшуюся звёздочку. Верно ли, что при любых действиях Васи Петя сможет получить уравнение, у которого разность каких-то двух корней равна 2014?

(*Н. Агаханов*)

Ответ. Да.

Решение. Пусть Петя первым ходом сделает свободный член уравнения нулём. Тогда полученное уравнение точно будет иметь корень 0; значит, Пете достаточно добиться того, чтобы другим корнем было число $t = 2014$. Это всегда можно сделать: если после хода Васи получится уравнение $x^3 + ax^2 + *x = 0$, то Петя может заменить оставшуюся звёздочку на $-t(t+a)$, а если после хода Васи получится $x^3 + *x^2 + bx = 0$, то Петя может заменить звёздочку числом $-(t^2+b)/t$. Очевидно, все числа, которые ставит Петя, рациональны.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Приведена стратегия Пети, работающая не при всех возможных ходах Васи, либо же требующая использования иррациональных чисел — 0 баллов.

Приведена стратегия, которая позволяет Пете гарантированно выиграть, но этот факт не обоснован — не более 5 баллов.

Баллы не снимаются в случае отсутствия указания на то, что числа, используемые Петей, рациональны, если их рациональность очевидна.

10.6. Треугольник ABC вписан в окружность Ω с центром O. Окружность, построенная на AO как на диаметре, пересекает описанную окружность треугольника OBC в точке $S \neq O$. Касательные к Ω в точках B и C пересекаются в точке P. Докажите, что точки A, S и P лежат на одной прямой. (*Р. Садыков*)

Решение. Поскольку CP и BP — касательные к Ω, имеем $\angle OBP = \angle OCP = 90°$; значит, точка P лежит на описанной окружности треугольника OBC, и PO — диаметр этой окружности (см. рис. 2). Поэтому $\angle OSP = 90^\circ$. Далее, поскольку AO — диаметр окружности, проходящей через A, S и O, получаем $\angle ASO = 90^\circ$. Итак, точки A и P лежат на перпендикуляре к OS, проходящем через точку S. Отсюда и следует утверждение задачи.

Замечание. В задаче предложено новое описание *симедианы* треугольника ABC. По определению, его симедиана из вершины A — это прямая, симметричная медиане из этой вершины относительно биссектрисы угла A. То, что прямая AS в нашей задаче — симедиана, следует из того известного факта, что симедиана из вершины A проходит через точку P пересечения касательных к описанной окружности, проведённых из остальных вершин треугольника. Об этом и других свойставх симедианы можно прочитать, например, в главе VI книги Д. Ефремова «Новая геометрия треугольника». В этой главе также много говорится о *точке Лемуана* — точке пересечения всех трёх симедиан треугольника.

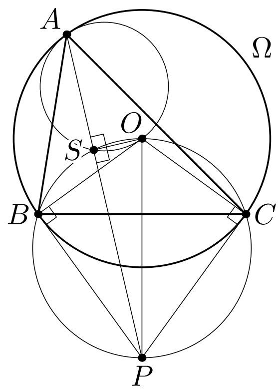

Рис. 2

10.7. По кругу стоят 10^{1000} натуральных чисел. Между каждыми двумя соседними числами записали их наименьшее общее кратное. Могут ли эти наименьшие общие кратные образовать 10^{1000} последовательных чисел (расположенных в каком-то порядке)?

(*С. Берлов*)

Ответ. Не могут.

Решение. Пусть $n = 10^{1000}$. Обозначим исходные числа (в порядке обхода) через $a_1, \ldots, a_n$; мы будем считать, что $a_{n+1} = a_1$. Положим $b_i = \text{НОК}(a_i, a_{i+1})$. Предположим что числа $b_1, \ldots, b_n$ — это n подряд идущих натуральных чисел.

Рассмотрим наибольшую степень двойки 2^m, на которую делится хотя бы одно из чисел a_i. Заметим, что ни одно из чисел $b_1, \ldots, b_n$ не делится на 2^{m+1}. Пусть для определённости $a_1 \vdots 2^m$;

тогда $b_1 \vdots 2^m$ и $b_n \vdots 2^m$. Значит, $b_1 = 2^m x$ и $b_n = 2^m y$ при некоторых нечётных x и y. Без ограничения общности можно считать, что $x < y$. Тогда, поскольку $b_1, \ldots, b_n$ образуют n последовательных чисел, среди них должно быть и число $2^m(x+1)$ (поскольку $2^m x < 2^m(x+1) < 2^m y$). Но это число делится на 2^{m+1} (так как $x+1$ четно), что невозможно. Противоречие.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Доказано, что среди исходных чисел есть два числа, делящихся на 2^k (число k определено в решении) — 2 балла.

10.8. Петя поставил на доску 50×50 несколько фишек, в каждую клетку — не больше одной. Докажите, что Вася может поставить на свободные поля этой же доски не более 99 новых фишек (возможно, ни одной) так, чтобы по-прежнему в каждой клетке стояло не больше одной фишки, и в каждой строке и каждом столбце этой доски оказалось чётное количество фишек.

(*С. Берлов*)

Решение. Построим граф с вершинами $r_1, \ldots, r_{50}$, соответствующими строкам доски, и вершинами $c_1, \ldots, c_{50}$, соответствующим её столбцам. Вершины r_i и c_j соединим ребром, если клетка в пересечении соответствующих строки и столбца свободна. Тогда Васина цель переформулируется так: *требуется отметить не более 99 рёбер так, чтобы из каждой вершины выходило чётное число непомеченных рёбер.* Действительно, если Вася поставит фишки в клетки, соответствующие отмеченным рёбрам, то в каждой строке и каждом столбце останется чётное число свободных клеток, что, очевидно, равносильно требуемому условию.

Мы докажем более общий факт: в любом графе на $n \geqslant 2$ вершинах можно отметить не более $n-1$ ребра так, чтобы из каждой вершины выходило чётное число непомеченных рёбер. При $n = 100$ получаем требуемое утверждение.

Индукция по n. База при $n = 2$ очевидна. Пусть теперь $n > 2$. Если есть вершина степени 1, то можно пометить единственное ребро, выходящее из неё, выкинуть её вместе с этим ребром и применить к оставшемуся графу предположение индукции; в результате окажется отмеченным ещё $n-2$ ребра. Если в графе есть вершина степени 0, то достаточно выкинуть её и применить предположение индукции.

Пусть теперь степень каждой вершины не меньше 2. Выйдем из произвольной вершины по ребру, из вершины, в которую мы пришли — по другому ребру, и т.д.; этот процесс можно продолжать, пока мы не вернёмся в вершину, в которой уже побывали. Таким образом, в графе нашёлся цикл. Выкинув его рёбра из графа, мы не изменим чётностей степеней вершин; значит, достаточно отметить требуемые рёбра в оставшемся графе. Применяя к нему тот же процесс, рано или поздно мы получим граф, в котором степень некоторой вершины не превосходит 1; а для таких графов утверждение уже доказано выше.

Комментарий. Утверждение о том, что в графе на n вершинах, число рёбер в котором не меньше n, обязательно есть цикл, можно использовать без доказательства.

11 класс

11.5. Числа x, y и z таковы, что все три числа $x+yz$, $y+zx$ и $z+xy$ рациональны, а $x^2+y^2=1$. Докажите, что число xyz^2 также рационально. (*Н. Агаханов*)

Решение. Из условия следует, что число $(x+yz)(y+zx) = xy+(x^2+y^2)z+xyz^2 = (xy+z)+xyz^2$ рационально. Поскольку число $xy+z$ также рационально по условию, то и число $xyz^2 = (x+yz)(y+zx)-(xy+z)$ также рационально.

Замечание. Из условий задачи не следует, что все три числа x, y, z рациональны. Например, этим условиям удовлетворяет тройка чисел $x=\dfrac{1-\sqrt{7}}{4}$, $y=\dfrac{1+\sqrt{7}}{4}$, $z=1$.

11.6. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Лучи AB и DC пересекаются в точке K. Оказалось, что точки B, D, а также середины отрезков AC и KC лежат на одной окружности. Какие значения может принимать угол ADC? (*Г. Жуков*)

Ответ. 90°.

Решение. Обозначим через N и M середины отрезков KC и AC соответственно. Тогда MN — средняя линия в треугольнике AKC, поэтому $\angle BAC = \angle NMC$. Кроме того, $\angle BAC = \angle BDC$, так как четырехугольник $ABCD$ — вписанный.

Пусть точки M и N лежат с одной стороны от прямой BD. Тогда M лежит внутри треугольника BCD; тогда она лежит внутри треугольника BND, а значит, и внутри его описанной окружности. Но тогда точки B, N, D и M не могут лежать на одной окружности. Значит, N и M лежат по разные стороны от BD, и $\angle BDC = \angle BMN$.

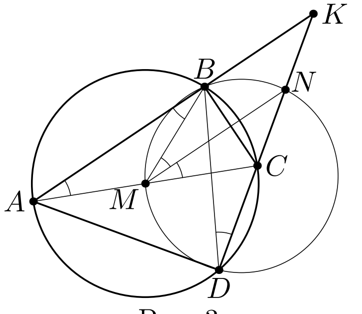

Рис. 3

Из параллельности MN и AK вытекает, что $\angle BMN = \angle ABM$, откуда $\angle BAC = \angle BDC = \angle ABM$. Отсюда получаем $AM = MB$, то есть в треугольнике ABC медиана BM

равна половине стороны AC, откуда $\angle ABC = 90^\circ$, а значит, и $\angle ADC = 90^\circ$.

Комментарий. За отсутствие обоснования расположения точек M и N баллы не снимаются.

11.7. Дан многочлен

$$P(x) = a_{2n}x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \ldots + a_1x + a_0,$$

у которого каждый коэффициент a_i принадлежит отрезку $[100, 101]$. При каком минимальном n у такого многочлена может найтись действительный корень? (*И. Богданов, К. Сухов*)

Ответ. $n = 100$.

Решение. Назовём многочлен, удовлетворяющий условию задачи, *красивым*. Многочлен $P(x) = 100(x^{200} + x^{198} + \ldots + x^2 + 1) + 101(x^{199} + x^{197} + \ldots + x)$ красив и имеет корень -1. Значит, при $n = 100$ требуемое возможно.

Осталось показать, что при $n < 100$ у красивого многочлена $P(x)$ не может быть вещественных корней. Для этого достаточно проверить, что $P(x) > 0$ при всех x. Это неравенство, очевидно, выполнено при $x \geqslant 0$; для отрицательных же $x = -t$ оно является следствием неравенства

$$100(t^{2n} + t^{2n-2} + \ldots + t^2 + 1) > 101(t^{2n-1} + t^{2n-3} + \ldots + t). \quad (*)$$

Значит, достаточно доказать это неравенство при всех $t > 0$. Умножая $(*)$ на $t + 1$, получаем равносильное неравенство $100(t^{2n+1} + t^{2n} + \ldots + 1) > 101(t^{2n} + t^{2n-1} + \ldots + t)$, или

$$100(t^{2n+1} + 1) > t^{2n} + t^{2n-1} + \ldots + t. \quad (**)$$

Заметим, что при всех $k = 1, \ldots, n$ верно неравенство $(t^k - 1)(t^{2n+1-k} - 1) \geqslant 0$, поскольку обе скобки имеют одинаковые знаки при $t > 0$. Раскрывая скобки, получаем

$$t^{2n+1} + 1 \geqslant t^{2n+1-k} + t^k.$$

Складывая все такие неравенства и учитывая, что $n < 100$, получаем

$$t^{2n} + t^{2n-1} + \ldots + t \leqslant n(t^{2n+1} + 1) < 100(t^{2n+1} + 1),$$

что и доказывает $(**)$.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Приведён пример многочлена, удовлетворяющего условию задачи при $n = 100$ — 1 балл.

Доказано, что $n \geqslant 100$ — 4 балла.

Если это неравенство не доказано, но сведено к неравенству (∗∗) — 2 балла.

11.8. Петя поставил на доску 50×50 несколько фишек, в каждую клетку — не больше одной. Докажите, что Вася может поставить на свободные поля этой же доски не более 99 новых фишек (возможно, ни одной) так, чтобы по-прежнему в каждой клетке стояло не больше одной фишки, и в каждой строке и каждом столбце этой доски оказалось чётное количество фишек.

(*С. Берлов*)

Решение. Построим граф с вершинами $r_1, \ldots, r_{50}$, соответствующими строкам доски, и вершинами $c_1, \ldots, c_{50}$, соответствующим её столбцам. Вершины r_i и c_j соединим ребром, если клетка в пересечении соответствующих строки и столбца свободна. Тогда Васина цель переформулируется так: *требуется отметить не более 99 рёбер так, чтобы из каждой вершины выходило чётное число непомеченных рёбер.* Действительно, если Вася поставит фишки в клетки, соответствующие отмеченным рёбрам, то в каждой строке и каждом столбце останется чётное число свободных клеток, что, очевидно, равносильно требуемому условию.

Мы докажем более общий факт: в любом графе на $n \geqslant 2$ вершинах можно отметить не более $n - 1$ ребра так, чтобы из каждой вершины выходило чётное число непомеченных рёбер. При $n = 100$ получаем требуемое утверждение.

Индукция по n. База при $n = 2$ очевидна. Пусть теперь $n > 2$. Если есть вершина степени 1, то можно пометить единственное ребро, выходящее из неё, выкинуть её вместе с этим ребром и применить к оставшемуся графу предположение индукции; в результате окажется отмеченным ещё $n-2$ ребра. Если в графе есть вершина степени 0, то достаточно выкинуть её и применить предположение индукции.

Пусть теперь степень каждой вершины не меньше 2. Выйдем из произвольной вершины по ребру, из вершины, в которую мы пришли — по другому ребру, и т.д.; этот процесс можно продолжать, пока мы не вернёмся в вершину, в которой уже побывали. Таким образом, в графе нашёлся цикл. Выкинув его рёбра из графа, мы не изменим чётностей степеней вершин; значит, достаточно отметить требуемые рёбра в оставшемся графе. Применяя к нему тот же процесс, рано или поздно мы получим граф, в котором степень некоторой вершины не превосходит 1; а для таких графов утверждение уже доказано выше.

Комментарий. Утверждение о том, что в графе на n вершинах, число рёбер в котором не меньше n, обязательно есть цикл, можно использовать без доказательства.