9 класс

Второй день

9.5. Фокусник выкладывает 36 карт в 6 столбцов по 6 карт и просит Зрителя мысленно выбрать карту и запомнить столбец, её содержащий. После этого Фокусник определённым образом собирает карты, снова выкладывает в виде квадрата 6×6 и просит Зрителя назвать номера столбцов, содержащих выбранную карту в первый и второй раз. После ответа Зрителя Фокусник безошибочно отгадывает карту. Как действовать Фокуснику, чтобы фокус гарантированно удался?

9.6. Числа a и b таковы, что $a^3 - b^3 = 2$, $a^5 - b^5 \geqslant 4$. Докажите, что $a^2 + b^2 \geqslant 2$.

9.7. На стороне AC треугольника ABC отметили произвольную точку D. Пусть E и F — точки, симметричные точке D относительно биссектрис углов A и C соответственно. Докажите, что середина отрезка EF лежит на прямой A_0C_0, где A_0 и C_0 — точки касания вписанной окружности треугольника ABC со сторонами BC и AB соответственно.

9.8. Дан квадрат $n \times n$. Изначально его клетки раскрашены в белый и чёрный цвета в шахматном порядке, причём хотя бы одна из угловых клеток чёрная. За один ход разрешается в некотором квадрате 2×2 одновременно перекрасить входящие в него четыре клетки по следующему правилу: каждую белую перекрасить в чёрный цвет, каждую чёрную — в зелёный, а каждую зелёную — в белый. При каких n за несколько ходов можно получить шахматную раскраску, в которой чёрный и белый цвета поменялись местами?

XXXVIII Всероссийская математическая олимпиада школьников

9 класс

Второй день

9.5. Фокусник выкладывает 36 карт в 6 столбцов по 6 карт и просит Зрителя мысленно выбрать карту и запомнить столбец, её содержащий. После этого Фокусник определённым образом собирает карты, снова выкладывает в виде квадрата 6×6 и просит Зрителя назвать номера столбцов, содержащих выбранную карту в первый и второй раз. После ответа Зрителя Фокусник безошибочно отгадывает карту. Как действовать Фокуснику, чтобы фокус гарантированно удался?

9.6. Числа a и b таковы, что $a^3 - b^3 = 2$, $a^5 - b^5 \geqslant 4$. Докажите, что $a^2 + b^2 \geqslant 2$.

9.7. На стороне AC треугольника ABC отметили произвольную точку D. Пусть E и F — точки, симметричные точке D относительно биссектрис углов A и C соответственно. Докажите, что середина отрезка EF лежит на прямой A_0C_0, где A_0 и C_0 — точки касания вписанной окружности треугольника ABC со сторонами BC и AB соответственно.

9.8. Дан квадрат $n \times n$. Изначально его клетки раскрашены в белый и чёрный цвета в шахматном порядке, причём хотя бы одна из угловых клеток чёрная. За один ход разрешается в некотором квадрате 2×2 одновременно перекрасить входящие в него четыре клетки по следующему правилу: каждую белую перекрасить в чёрный цвет, каждую чёрную — в зелёный, а каждую зелёную — в белый. При каких n за несколько ходов можно получить шахматную раскраску, в которой чёрный и белый цвета поменялись местами?

10 класс

Второй день

10.5. Дан выпуклый пятиугольник. Петя выписал в тетрадь значения синусов всех его углов, а Вася — значения косинусов всех его углов. Оказалось, что среди выписанных Петей чисел нет четырёх различных. Могут ли все числа, выписанные Петей, оказаться различными?

10.6. Петя выбрал натуральное число $a > 1$ и выписал на доску пятнадцать чисел $1+a$, $1+a^2$, $1+a^3$, $\ldots$, $1+a^{15}$. Затем он стёр несколько чисел так, что любые два оставшихся числа взаимно просты. Какое наибольшее количество чисел могло остаться на доске?

10.7. Дан квадрат $n\times n$. Изначально его клетки раскрашены в белый и чёрный цвета в шахматном порядке, причём хотя бы одна из угловых клеток чёрная. За один ход разрешается в некотором квадрате 2×2 одновременно перекрасить входящие в него четыре клетки по следующему правилу: каждую белую перекрасить в чёрный цвет, каждую чёрную — в зелёный, а каждую зелёную — в белый. При каких n за несколько ходов можно получить шахматную раскраску, в которой чёрный и белый цвета поменялись местами?

10.8. В трапеции $ABCD$ боковая сторона CD перпендикулярна основаниям, O — точка пересечения диагоналей. На описанной окружности треугольника OCD взята точка S, диаметрально противоположная точке O. Докажите, что $\angle BSC = \angle ASD$.

XXXVIII Всероссийская математическая олимпиада школьников

10 класс

Второй день

10.5. Дан выпуклый пятиугольник. Петя выписал в тетрадь значения синусов всех его углов, а Вася — значения косинусов всех его углов. Оказалось, что среди выписанных Петей чисел нет четырёх различных. Могут ли все числа, выписанные Петей, оказаться различными?

10.6. Петя выбрал натуральное число $a > 1$ и выписал на доску пятнадцать чисел $1+a$, $1+a^2$, $1+a^3$, $\ldots$, $1+a^{15}$. Затем он стёр несколько чисел так, что любые два оставшихся числа взаимно просты. Какое наибольшее количество чисел могло остаться на доске?

10.7. Дан квадрат $n\times n$. Изначально его клетки раскрашены в белый и чёрный цвета в шахматном порядке, причём хотя бы одна из угловых клеток чёрная. За один ход разрешается в некотором квадрате 2×2 одновременно перекрасить входящие в него четыре клетки по следующему правилу: каждую белую перекрасить в чёрный цвет, каждую чёрную — в зелёный, а каждую зелёную — в белый. При каких n за несколько ходов можно получить шахматную раскраску, в которой чёрный и белый цвета поменялись местами?

10.8. В трапеции $ABCD$ боковая сторона CD перпендикулярна основаниям, O — точка пересечения диагоналей. На описанной окружности треугольника OCD взята точка S, диаметрально противоположная точке O. Докажите, что $\angle BSC = \angle ASD$.

11 класс

Второй день

11.5. Докажите, что для любого натурального n выполнено неравенство $(n-1)^{n+1}(n+1)^{n-1} < n^{2n}$.

11.6. В волейбольном турнире с участием 73 команд каждая команда сыграла с каждой по одному разу. В конце турнира все команды разделили на две группы так, что любая команда первой группы одержала n побед, а любая команда второй группы — ровно m побед. Могло ли оказаться, что $m \neq n$?

11.7. Даны различные натуральные числа a, b. На координатной плоскости нарисованы графики функций $y = \sin ax$, $y = \sin bx$ и отмечены все точки их пересечения. Докажите, что существует натуральное число c, отличное от a, b и такое, что график функции $y = \sin cx$ проходит через все отмеченные точки.

11.8. Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ таков, что $AB \cdot CD = AD \cdot BC$. Докажите, что $\angle BAC + \angle CBD + \angle DCA + \angle ADB = 180^\circ$.

XXXVIII Всероссийская математическая олимпиада школьников

11 класс

Второй день

11.5. Докажите, что для любого натурального n выполнено неравенство $(n-1)^{n+1}(n+1)^{n-1} < n^{2n}$.

11.6. В волейбольном турнире с участием 73 команд каждая команда сыграла с каждой по одному разу. В конце турнира все команды разделили на две группы так, что любая команда первой группы одержала n побед, а любая команда второй группы — ровно m побед. Могло ли оказаться, что $m \neq n$?

11.7. Даны различные натуральные числа a, b. На координатной плоскости нарисованы графики функций $y = \sin ax$, $y = \sin bx$ и отмечены все точки их пересечения. Докажите, что существует натуральное число c, отличное от a, b и такое, что график функции $y = \sin cx$ проходит через все отмеченные точки.

11.8. Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ таков, что $AB \cdot CD = AD \cdot BC$. Докажите, что $\angle BAC + \angle CBD + \angle DCA + \angle ADB = 180^\circ$.